



Universidade de Brasília
FACE - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais

Aplicação da Teoria do Valor Extremo em Séries do Mercado de Câmbio

Nicollas Stefan Soares da Costa

**Brasília
2016**

Nicollas Stefan Soares da Costa

Aplicação da Teoria do Valor Extremo em Séries do Mercado de Câmbio

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Contábeis.

Orientador: Ms. Afonso José Walker

Brasília
2016

Costa, N. S. S.

Aplicação da Teoria do Valor Extremo em Séries do Mercado de Câmbio

52 páginas

Monografia - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de Brasília. Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais.

1. Teoria do Valor Extremo
2. Bloco Máximo
3. TVE Aplicado na Área Financeira
4. Volatilidade da Taxa de Câmbio
5. Ponto Além de um Limiar

I. Universidade de Brasília. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais.

Comissão Julgadora:

Prof. Ms.: Elivânio Geraldo de Andrade
Membro Interno

Prof. Ms. Afonso José Walker
Orientador

Dedicatória

Ao meu Pai, **Murilo Vieira da Costa** (*in
memoriam*), que sempre foi um exemplo para
a minha vida.

[Mas eu o tentarei, como ele próprio aconselhava,
pois o importante é tentar, mesmo o impossível.]

Jorge Amado.

Agradecimentos

Primeiramente ao meu orientador, Ms. Afonso José Walker, pela orientação e influência na minha vida acadêmica.

A professora Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano, que muito gentilmente fez críticas para o aperfeiçoamento do trabalho, e sempre disposta a ajudar.

A Lara Gabriela, pelo amor, carinho, e principalmente pelo incentivo para a realização do trabalho.

Sumário

1	Introdução	11
2	Revisão da Literatura	14
2.1	Histórico e Aplicações da Teoria do Valor Extremo em Finanças .	14
2.2	Modelagem da GEV para a Distribuição dos Máximos	17
2.2.1	Distribuição GEV	21
2.3	Inferência para a Distribuição GEV	23
2.3.1	Estimação por Máxima Verossimilhança	23
2.3.2	Inferência para os Níveis de Retorno	24
2.4	Modelos Clássicos	25
2.4.1	Modelagem das k -maiores Estatísticas de Ordem	25
2.4.2	Modelagem por Excedência de um Limiar (POT)	27
2.4.3	Estimação do Índice Caudal	30
2.5	Modelagem dos Dados	32
3	Aplicação	35
3.1	Descrição da Série Temporal	35
3.2	Testes de Estacionariedade e Independência	37

3.3	Modelagem dos Log-Retornos	38
4	Conclusões	47
	Referências Bibliográficas	49

Lista de Figuras

2.1	Representação das distribuições de valores extremos.	20
2.2	Representação da distribuição GEV.	22
2.3	Método POT dos dados de vazão anual do Rio Paraíba do Sul. . .	29
2.4	Evolução da série <i>intraday</i> da variabilidade diária dos preços. . . .	33
2.5	Painel superior: Evolução da série logarítmica dos retornos da variabilidade diária dos preços. Painel inferior: Função de auto- correlação amostral.	34
3.1	Evolução da série <i>intraday</i> da taxa diário de câmbio.	37
3.2	Histograma dos log-retornos, estimação <i>kernel</i> e distribuição Normal. .	39
3.3	<i>QQ-plot</i> dos resíduos.	40
3.4	Ajuste dos resíduos do modelo $AR(1) - GARCH(1, 1)$	41
3.5	Histograma dos blocos máximos.	42
3.6	Ajuste da distribuição GEV.	43
3.7	Série do log-retorno com limiar tracejado.	44
3.8	Gráficos de diagnóstico.	45

Lista de Tabelas

3.1	Trecho da série <i>intraday</i> R\$/US\$.	36
3.2	Resultados testes ADF e Ljung-Box.	38
3.3	Resultado da Estimação dos Parâmetros.	41
3.4	Estimação dos Parâmetros da GEV.	42
3.5	Estimação dos Parâmetros da GPD.	44

Resumo

No presente trabalho, será abordada a Teoria do Valor Extremo (TVE) aplicada a séries do mercado de câmbio (US\$/R\$). Essa metodologia possui a vantagem de ser mais abrangente em relação as distribuições com caudas pesadas do que os métodos tradicionais. Além disso, essa teoria é útil para estudar as caudas das distruibuições de eventos raros que na prática podem ocorrer quando há quebras e especulações no mercado de ações, bem como quando essas ações apresentam alta volatilidade. Portanto, o objetivo do trabalho é lidar com o comportamento das caudas da série logarítmica do retorno da variabilidade diária das taxas de câmbio da moeda norte-americana (US\$) frente ao real (R\$) para calcular a medida de risco caudal e o seu comportamento (distribuição).

Palavras Chave: Teoria do Valor Extremo, Bloco Máximo, TVE Aplicado na Área Financeira, Volatilidade da Taxa de Câmbio,Ponto Além de um Limiar.

Keywords: *Extreme Value Theory, Block Maxima, EVT Applying in Finance, Exchange Volatility, Peaks Over Threshold*

Capítulo 1

Introdução

Com as recentes instabilidades nos mercados financeiros mundiais nos últimos anos, aumentaram as críticas sobre os sistemas de gestão de riscos que motivaram buscar metodologias alternativas mais apropriadas para lidar com eventos raros, que impactam fortemente o âmbito financeiro.

Dessa forma, a Teoria do Valor Extremo (TVE) fornece uma metodologia apropriada para modelar distribuições de estatísticas extremas que possuem caudas pesadas de valores recordes de ativos financeiros, níveis extremos de rios (inundações), terremotos, entre outros. Além disso, essa teoria é útil para estudar as caudas das distriuições de eventos raros que na prática podem ocorrer quando há quebras e especulações no mercado de ações, bem como quando essas ações apresentam alta volatilidade.

Nos campos de engenharia e seguros, Embrechts et al. (1999) e Reiss & Thomas (1997), estabeleceram de forma bastante didática, a teoria e a prática da TVE. Vários estudos têm analisado as variações extremas que afetam os mercados financeiros, principalmente em situações de crises, como, variações em carteiras

de ações das bolsas de valores mundiais, mercado de crédito, oscilações de moedas (variação cambial) e monitoramento das taxas de juros.

Fama (1976) e Mandelbrot (1966) foram os primeiros a reconhecer caudas pesadas e excesso além de um limiar (POT) para ativos financeiros. Outras aplicações, em que a correlação serial dos dados é considerada, foram feitas por Rachev & Mitnik (2000) em retornos de ativos, Gilli & Këllezli (2003) que indicam a utilização da TVE e POT para os cálculos de medidas de risco nas caudas, enquanto que Longin (2000) demonstra a implementação da TVE aplicado em portfólios. Considerando a volatilidade dos preços do petróleo, Marimoutou, Raggard & Trabelsi (2009) mensuraram o risco utilizando a metodologia *VaR* da Teoria do Valor Extremo.

Portanto, o objetivo do trabalho é lidar com o comportamento das caudas da série logarítmica do retorno da variabilidade diária das taxas de câmbio da moeda norte-americana (US\$) frente ao real (R\$). Especificamente, o foco é sobre a Teoria do Valor Extremo para calcular a medida de risco caudal e o seu comportamento (distribuição).

Assim, a modelagem de séries financeiras pela Teoria do Valor Extremo é justificada pelas suas propriedades (suposição de cauda pesada), bem como em diversos trabalhos práticos e teóricos que descrevem o comportamento diferenciado e o uso de metodologias alternativas as usuais (normalidade).

O trabalho foi dividido em quatro capítulos a serem descritos a seguir. O Capítulo 2 descreve um breve histórico dos conceitos da Teoria do Valor Extremo, destacando algumas referências bibliográficas na parte teórica e prática. No Capítulo 3 é feita uma revisão das modelagens e inferências da TVE, bem como uma explanação de modelos clássicos para a aplicabilidade da teoria. O

Capítulo 4 apresenta uma aplicação da metodologia descrita no trabalho para a série da taxa de câmbio entre o dólar americano (US\$) e o real (R\$) obtida no *Tick Data Inc.* do mercado FOREX (*foreign exchanges*). Por fim, no Capítulo 5 apresentam-se as considerações finais dos resultados obtidos com a aplicação da metodologia descrita.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Apesar da Teoria do Valor Extremo (TVE) ser abordada principalmente em temas nas áreas de hidrologia, engenharia, atuária entre outras, houve um enorme crescimento na aplicação em finanças. Podem-se citar exemplos em perdas de uma carteira de investimento, análise de portfólios, mercado acionário (volatilidade) entre outros diversos temas abordados.

Dessa forma, foram selecionados alguns artigos que abordam a aplicação dessa teoria na área de finanças afim de dar suporte aos objetivos do presente trabalho e elucidar alguns conceitos intrínsecos da TVE.

2.1 Histórico e Aplicações da Teoria do Valor Extremo em Finanças

Evidências dadas por Fama (1976), usualmente sugerem que a distribuição dos retornos diários possuem cauda pesada comparada a distribuição Normal, que não possui essa propriedade. Contudo, Mandelbrot (1966) foi um dos primeiros

a reconhecer caudas pesadas e excesso além de um limiar para ativos financeiros.

O conceito, de fato, foi proposto por Jenkinson (1955) que introduziu as distribuições generalizadas de valor extremo (GEV), que culminou em um avanço significativo no campo, que futuramente, seria a Teoria do Valor Extremo.

Desde a década de 90, pesquisadores constantemente estão aplicando a TVE em fenômenos de risco real a procura de respostas. Assim, nos últimos tempos a TVE se tornou um instrumento de modelagem estatística de eventos raros que é de suma importância para carteiras de risco. E amplamente utilizada para calcular estimativas e intervalos de confiança para problemas de otimização de distribuições caudais em finanças.

Embrechts et al. (1997) mostram que a TVE foca sobre o comportamento de dependência da cauda para um conjunto de retornos de ativos e utilizado para modelar os máximos de uma variável aleatória. Já as distribuições de Pareto lidam com caudas pesadas, apesar de utilizarem a distribuição completa e não somente as caudas, descrito em Rachev & Mitnik (2000). Enquanto, Beirlant & Teugels (1992), Embrechts & Kluppelberg (1993) ilustraram a TVE (matematicamente) e suas aplicações.

Com isso, a aplicação da Teoria do Valor Extremo torna-se extremamente ampla e útil. Desse modo, Gilli & Këllezli (2003) indicam o uso das teorias: TVE; bloco máximo e excedente além de um limiar (POT) para calcular medidas de riscos da cauda como: VaR e ES (*Expected Shortfall*). Outros autores como Embrechts et al. (1997) modelaram eventos raros de dados de seguradoras e outros aspectos financeiros utilizando TVE, enquanto Longin (2000) demonstra a implementação da TVE para estimação do VaR de um portfólio.

Outros autores como Marinelli, Addona & Rachev (2006) compararam o de-

sempenho de vários modelos de *VaR* e ES com base na Teoria do Valor Extremo e distribuições α -estáveis. Dessa maneira, os modelos α -estáveis superam as estimativas do *VaR* em relação a TVE, principalmente em relação ao método bloco máximo, enquanto que o método de excesso além de um limiar é preferível na estimativa do ES.

Já Marimoutou, Raggad & Trabelsi (2009) levando em consideração a volatilidade dos preços do petróleo, utilizaram o *Value-at-Risk VaR* como mensuração de risco. Após testarem diferentes metodologias, TVE condicional e não-condicional, modelos *GARCH*, entre outros, demonstraram que o procedimento TVE condicional obteve melhores resultados em relação a outras metodologias convencionais.

A Teoria do Valor Extremo (TVE) fornece uma abordagem para estudar estatísticas extremas e o comportamento das caudas de uma dada distribuição. Ela permite aplicações em observações extremas para determinar a densidade da cauda e construir modelos estatísticos para fenômenos raros como quebras e especulações no mercado de ações, níveis extremos de rios (inundações), terremotos entre outros.

A abordagem surgiu na literatura com Jenkison (1955), Prescott & Walden (1980), Hosking, Wallis & Wood (1985). E pode-se encontrar teoria e exemplos práticos nos livros de Embrechts, Klüppelberg & Mikosch (1997) e Jondeau, Poon & Rockinger (2000).

Em Reiss & Thomas (2001), encontram-se diversos exemplos práticos aplicados em hidrologia, como frequência de enchentes, séries temporais financeiras, como retorno de ativos: ações; moeda estrangeira ou ativos, além de áreas como seguros, telecomunicação e engenharia.

A metodologia é bastante semelhante ao teorema do limite central (TLC)

e ambos têm origens matemáticas comuns. Assim como a média das amostras possui distribuição limite Normal, a distribuição limite das estatísticas de ordem são caracterizadas por uma classe na teoria do valor extremo. Essa teoria lida com a distribuição assintótica do máximo sem generalizar para a distribuição de toda a série, ou seja, define somente a distribuição das caudas.

Análogo ao teorema do limite central, o conhecimento da distribuição original das observações extremas não é necessária para a modelagem. Dessa forma, existem duas abordagens para estudar os eventos extremos. Uma delas se baseia no comportamento das k -maiores estatísticas de ordem dentro de um bloco, denotada por BM (*Block Maxima*), para valores pequenos de k . Enquanto a outra modela o excedente após um certo limite, denominada POT (*Peaks Over Threshold*).

2.2 Modelagem da GEV para a Distribuição dos Máximos

Definição 1 (Embrechts et al. (1997)) : *Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias estacionárias que podem ser i.i.d. (independente e identicamente distribuída ou dependentes com função de distribuição F e $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Suponha que os X_i representam valores de um processo medido em tempo regular, por exemplo, temperatura diária, nível de um rio, entre outros, tal que a forma de M_n represente o máximo das n observações do processo. A distribuição da variável M_n pode ser obtida através de todos os valores*

de n por

$$\begin{aligned}
 P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\
 &\stackrel{i.i.d.}{=} P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \\
 &= [F(x)]^n,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, $F^n(x)$ é dita a função de distribuição do máximo.

Observação 1 : Dada a independência das variáveis, $P(\bigcap_{i=1}^n M_i \leq x) = \prod_{i=1}^n [P(M_i \leq x)]$, portanto $P(M_n \leq x) = [P(M \leq x)]^n$.

Observação 2 : Apesar da maioria dos casos tratar a abordagem das observações máximas, os mesmos resultados podem ser generalizados para o mínimo, dada a simples conversão

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n).$$

No entanto, a distribuição F é desconhecida, e na prática essa abordagem não é muito útil. Com isso, a utilização de técnicas estatísticas para estimar a distribuição F , torna-se uma possibilidade para substituir a estimativa da equação (2.1).

Uma metodologia alternativa é procurar por famílias aproximadas de modelos para F_n , tal que, examina-se o comportamento da função quando $n \rightarrow \infty$. Para evitar que a distribuição de M_n degenere para uma massa pontual, ela é normalizada de tal forma que

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n},$$

em que $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ são sequências de constantes. Com base em escolhas apropriadas das sequências a_n e b_n , quando n cresce, ocorre a estabilização dos parâmetros de locação e escala da distribuição M_n^* , evitando assim dificuldades na abordagem direta da variável M_n .

À visto disso, Fisher & Tippet (1928), pioneiros da Teoria do Valor Extremo, demonstraram um importante resultado no qual a padronização da distribuição dos máximos por sequências de constantes (a_n e b_n) convergem para distribuições limites, denominadas distribuições de valor extremo. Tal resultado pode ser exemplificado pelo seguinte Teorema.

Teorema 1 (Fisher & Tippet (1928)) : *Seja X_t uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com função de distribuição F e $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Se existem sequências de constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) &= P(M_n \leq a_n x + b_n) \\ &= F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{D} G(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que G é uma função de distribuição não degenerada, então G pertence a uma das seguintes famílias

$$\text{Gumbel} : \Lambda(x) = \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Fréchet} : \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \exp \left[-\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\alpha} \right], & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

$$Weibull : \Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[- \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\alpha} \right] \right\}, & se \quad x \leq 0 \\ 1, & se \quad x > 0, \end{cases}$$

em que $\sigma > 0$, $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ são respectivamente os parâmetros de escala, locação e forma. Vale ressaltar que o parâmetro α mede o comportamento da cauda da distribuição, pois quanto menor o valor de α mais pesada deve ser a cauda da distribuição.

Na Figura 2.1, tem-se a representação dessas distribuições e vale a pena enfatizar que as distribuições não podem ser espelhadas simetricamente em torno das ordenadas. Observa-se que a distribuição Fréchet possui uma cauda pesada, enquanto que as distribuições Gumbel e Weibull apresentam uma cauda leve.

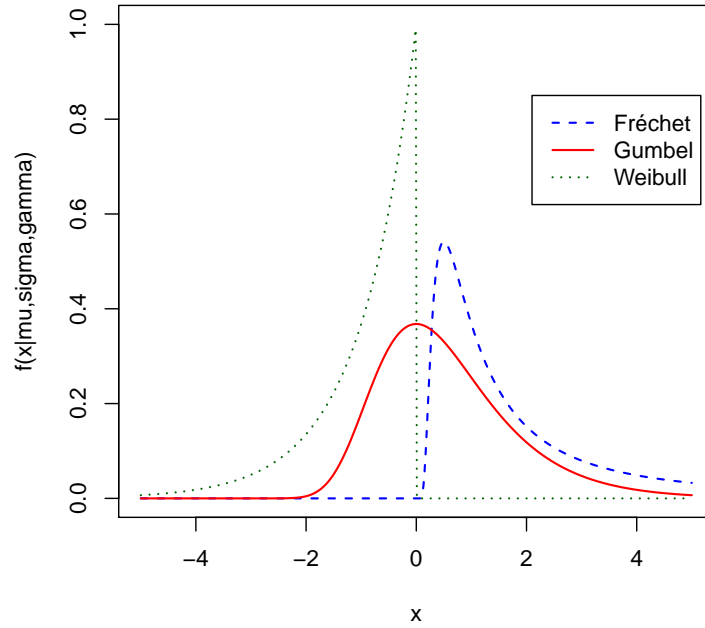


Figura 2.1: Representação das distribuições de valores extremos.

Um aspecto significativo do Teorema 1 é quando M_n puder ser estabilizado pelas sequências adequadas, a distribuição limite da variável normalizada M_n^* somente poderá ser um dos três tipos de distribuição de valores extremos. Nesse sentido pode-se comparar o Teorema anterior com os resultados análogos ao Teorema Central do Limite.

2.2.1 Distribuição GEV

Teorema 2 (Von Mises (1954) e Jenkinson (1955)) : *Seja X_t uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com função de distribuição F e $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Se existem sequências de constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \longrightarrow G(x), \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty, \quad (2.3)$$

em que G é uma função de distribuição não degenerada, portanto, G é membro da família GEV (Generalized Extreme Value) dada por

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \quad (2.4)$$

definida em $\{x : 1 + \xi(x - \mu)/\sigma > 0\}$, em que $\sigma > 0$ e $\mu, \xi \in \mathbb{R}$.

A partir da unificação da três famílias de distribuições de valores extremo em uma única família, a implementação estatística simplifica-se, e por meio da estimação do parâmetro ξ e os dados coletados é determinado qual família é mais apropriada, e ressalta-se a relação entre as distribuições extremas e a GEV, assim $\xi = 1/\alpha$. A Figura 2.2 mostra a representação das distribuições GEV de acordo com a definição do parâmetro ξ .

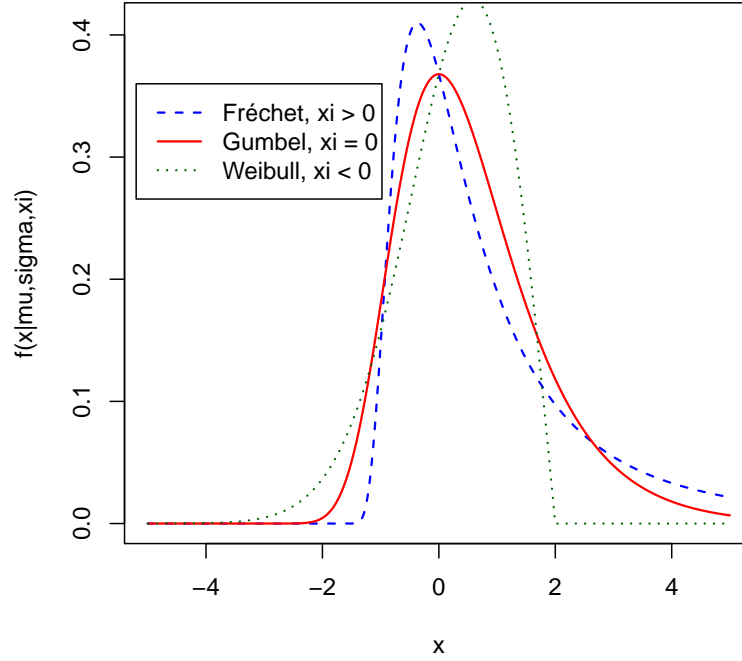


Figura 2.2: Representação da distribuição GEV.

Uma maneira de aproximação da distribuição GEV se dá a partir de uma série de observações i.i.d. X_1, X_2, \dots, X_n , em que os dados são divididos em blocos de tamanho n suficientemente grande, resultando em uma série de máximos em cada bloco, $M_{n,1}, M_{n,1}, \dots, M_{n,m}$, que pode ser ajustada pela distribuição GEV. As estimativas dos quantis da distribuição do máximo são obtidas pela inversão da equação (2.2) como

$$z_p = \begin{cases} \theta - \frac{\sigma}{\xi} \{1 - [-\log(1-p)]^{-\xi}\}, & \text{para } \xi \neq 0, \\ \theta - \sigma \log[-\log(1-p)], & \text{para } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

em que θ é o limiar de corte e $G(z_p) = 1 - p$. z_p é o nível de retorno associado ao

período $\frac{1}{p}$, e se espera que o nível z_p exceda (além de θ) em média uma vez a cada $\frac{1}{p}$. Entretanto, a relação do modelo GEV com seus parâmetros é interpretado mais claramente em termos dos quantis. Dessa maneira, definindo $y_p = -\log(1 - p)$, tem-se

$$z_p = \begin{cases} \theta - \frac{\sigma}{\xi}[1 - y_p^{-\xi}], & \text{para } \xi \neq 0, \\ \theta - \sigma \log y_p, & \text{para } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

2.3 Inferência para a Distribuição GEV

2.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Seja Z_1, Z_2, \dots, Z_m variáveis aleatórias i.i.d., sob hipótese, com função de distribuição GEV, portanto, a função logarítmica de verossimilhança para estimar os parâmetros da GEV, para $\xi \neq 0$ é

$$l(\mu, \sigma, \xi) = -m \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \log \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{i=1}^m \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}, \quad (2.7)$$

em que

$$1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) > 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

No caso em que $\xi = 0$, a abordagem utiliza o limite Gumbel da distribuição da GEV e consequentemente tem-se a função logarítmica de verossimilhança igual a

$$l(\mu, \sigma) = -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \exp \left[-\left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)\right], \quad (2.8)$$

A maximização das equações (2.7) e (2.8), com respeito ao vetor de parâme-

tros (μ, σ, ξ) , encaminha para as estimativas de máxima verossimilhança para a família GEV.

2.3.2 Inferência para os Níveis de Retorno

A estimativa de máxima verossimilhança de z_p , com $0 < p < 1$, substituído as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da GEV da equação (2.5) para os retornos para $\frac{1}{p}$ é dado por

$$\hat{z}_p = \begin{cases} \theta - \frac{\sigma}{\xi}[1 - y_p^{-\xi}], & \text{para } \xi \neq 0, \\ \theta - \sigma \log y_p, & \text{para } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

em que $y_p = -\log(1 - p)$. E pelo método delta,

$$VaR(\hat{z}_p) \approx \nabla z_p^T V \nabla z_p,$$

em que V é a matriz de variância e covariância de $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$, assim

$$\begin{aligned} \nabla z_p^T &= \left[\frac{\partial z_p}{\partial \mu}, \frac{\partial z_p}{\partial \sigma}, \frac{\partial z_p}{\partial \xi} \right] \\ &= [1, -\xi^{-1}(1 - y_p^{-\xi}), \sigma \xi^{-2}(1 - y_p^{-\xi}) - \sigma \xi^{-1} y_p^{-\xi} \log y_p], \end{aligned} \quad (2.10)$$

avaliada em $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$.

Para estimar os níveis de retorno associados a períodos longos, $t = \frac{1}{p}$, correspondente aos quantis associados aos valores de p , tal que $z(\frac{1}{p}) = z_p$, então as

estimativas máxima verossimilhança é dado por

$$\hat{z}_0 = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}},$$

e pela equação (2.3.2),

$$\nabla z_p^T = [1, -\xi^{-1}, \sigma\xi^{-2}],$$

avaliada em $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$. Para $\hat{\xi} \geq 0$, a estimativa de verossimilhança da distribuição é ∞ .

2.4 Modelos Clássicos

Um obstáculo inerente para qualquer análise envolvendo valores extremos é a quantidade limitada de dados para a estimação do modelo. Valores extremos são escassos de modo que as estimativas do modelo, como por exemplo, os níveis de retornos extremos, possuem variância muito grande. Isso tem motivado a busca por abordagens alternativas, ao contrário da modelagem através, somente, dos máximos dos blocos. Existem duas caracterizações bastante conhecidas. Uma diz respeito a modelagem por excedência de um valor limiar, enquanto que a segunda abordagem se baseia no comportamento das k -maiores estatísticas de ordem dentro de um bloco, para k pequeno.

2.4.1 Modelagem das k -maiores Estatísticas de Ordem

A modelagem das k -maiores estatísticas de ordem é feito pelo agrupamento em blocos, tal que, no bloco i , as k_i maiores observações são registradas, define-se

então

$$M_i^{(k_i)} = (z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^{k_i}), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

e usualmente fixa-se $k_1 = k_2 = \dots = k_m = k$ para um valor específico de k .

Contudo, a escolha do tamanho do bloco equivale a um *trade-off* entre vício e variância, que é resolvido por um critério pragmático, geralmente por blocos anuais. Outra problemática, com o mesmo *trade-off*, leva em conta a quantidade de estatísticas de ordem em cada bloco, pequenas quantidades de k em cada bloco propiciam uma variância alta, enquanto, quantidades altas de k violam as suposições assintóticas conduzindo a vícios.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.. Na Subseção 2.2.1 tem-se que a GEV é a distribuição limite de M_n quando $n \rightarrow \infty$. Estendendo esse resultado para $M_n^{(k)} = k$ -ésima maior estatística de ordem de (X_1, X_2, \dots, X_n) , o comportamento limite da variável, para k fixo, quando $n \rightarrow \infty$ generaliza o Teorema 1.

Teorema 3 (Embrechts et al. (1997)) : *Se existem sequências de constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \Re$ tais que*

$$P\left(\frac{M_n^{(k)} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G_k(x), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

definido em $\{x : 1 + (x - \mu)/\sigma > 0\}$, em que

$$G_k(x) = \exp[-\tau(x)] \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\tau(x)^j}{j!}, \quad (2.11)$$

com

$$\tau(x) = \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}.$$

2.4.2 Modelagem por Excedência de um Limiar (POT)

A teoria do valor extremo foca sua atenção justamente onde os eventos extremos ocorrem. Uma forma de computar tais eventos é considerar os valores que excedem um determinado limiar θ também chamados de *Peak-Over-Threshold* (POT) Jondeau et al. (2007).

Os eventos extremos são delimitados definindo um valor limite θ , e as excedências definidas como $\{x_i : x_i > \theta\}$. Sejam as excedências $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}$ e definindo $y_j = x_j - \theta$, em que $j = 1, 2, \dots, k$, a diferença entre o valor limite e as observações que excederam esse limite, os valores y_j são considerados variáveis aleatórias independentes. Assim, define-se a função de distribuição do excesso de perdas y_t em que x_i excede θ como,

$$\begin{aligned} F_\theta(y) &= P(x_i - \theta \leq y \mid x_t > \theta) \\ &= \frac{P(\theta < x_t \leq \theta + y)}{P(x_t > \theta)} \\ &= \frac{F(y + \theta) - F(\theta)}{1 - F(\theta)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

em que θ é o valor limite.

E pela equação (2.12), deriva-se a seguinte equação

$$F(x) = [1 - F(\theta)] \cdot F_\theta(x - \theta) + F_\theta. \tag{2.13}$$

No caso em que a distribuição F é conhecida, a distribuição dos limites de

excessos também será conhecida. Destarte, em situações práticas a função F é desconhecida e portanto, consideram-se aproximações para a distribuição dos máximos.

Modelo de Aproximação Assintótica

Teorema 4 ([Embrechts et al. (1997)]) : *Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. que possuem função de distribuição F , e $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Denota-se um termo arbitrário na sequência X_i por X , e F satisfaz a definição (2.2), assim para n suficientemente grande*

$$P(M_n \leq x) \approx G(x), \quad (2.14)$$

em que

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{-1}{\xi}} \right\} \quad (2.15)$$

para algum $\mu, \sigma > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}$. Então, a função distribuição de $(X - \theta)$, para θ suficientemente grande, e condicionada a $X > \theta$ é aproximadamente

$$H(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\hat{\sigma}} \right)^{\frac{-1}{\xi}}, \quad y > 0, \quad (2.16)$$

em que $\left(1 + \frac{\xi y}{\hat{\sigma}} \right) > 0$ e $\hat{\sigma} = \sigma + \xi(\theta - \mu)$.

A equação definida em (2.16) descreve a função de probabilidade denominada Família de Pareto Generalizada, denotada por GPD (*Generalized Pareto Distribution*). O parâmetro ξ é ponto chave no comportamento da distribuição, para $\xi < 0$, a distribuição de excessos possui limite superior $\theta - \frac{\hat{\sigma}}{\xi}$, para $\xi \geq 0$ a

distribuição não possui limite superior e considerando $\xi \rightarrow 0$, tem-se

$$H(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\hat{\sigma}}\right), \quad (2.17)$$

em que corresponde a distribuição Exponencial com parâmetro $\frac{1}{\hat{\sigma}}$.

Portanto, $H(y)$ é a distribuição generalizada de Pareto (GPD), com ξ o parâmetro de forma e σ o parâmetro de escala, o qual mede a dispersão da série. Quanto maior o parâmetro de escala, mais espalhada a distribuição.

Essa abordagem traz a oportunidade de fazer suposições apenas nas caudas da distribuição, o qual é relevante para a estimação do VaR. Dessa maneira, o Teorema 4 descreve uma forma de modelagem para valores extremos.

A Figura 2.3 mostra a representação de um exemplo do uso da metodologia POT em dados de vazão anual do Rio Paraíba do Sul. A linha tracejada em vermelho, indica o valor de θ , isto é, o valor limite, enquanto que os registros que ultrapassam esse limiar são considerados valores extremos.

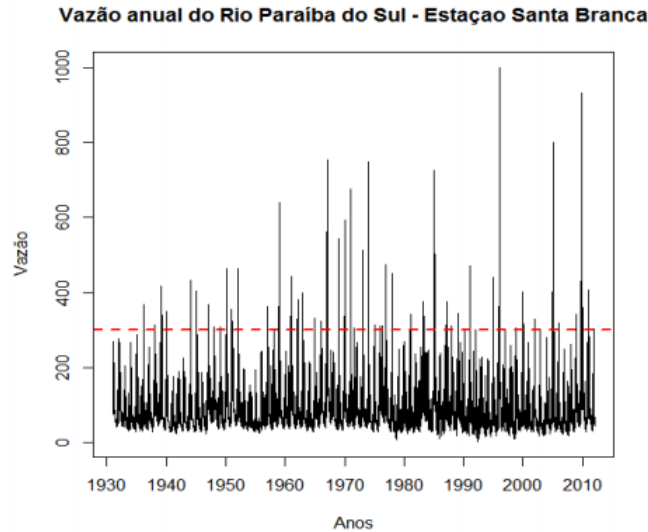


Figura 2.3: Método POT dos dados de vazão anual do Rio Paraíba do Sul.

2.4.3 Estimação do Índice Caudal

Em geral, existem dois procedimentos para a estimação do índice caudal (α). A primeira classe segue a abordagem paramétrica e estima diretamente α com a metodologia de máxima verossimilhança ou técnicas de regressão. Contudo, Jansen & de Vries (1991) mostram que as estimativas são consistentes, porém, não muito eficientes. Além disso, a abordagem paramétrica requer a estimação de um parâmetro escalar extra, que torna desvantajoso esse método.

A segunda classe segue uma abordagem eficiente para a estimativa do parâmetro da cauda por utilizar todas as realizações (de uma única sub amostra) que estão acima de um certo valor limiar. Assim, estimadores semi paramétricos foram propostos com base nessa proposta. Eles utilizam as maiores estatísticas de ordem e necessitam apenas que a distribuição que gerou as observações seja bem comportada.

Suponha a sequência estacionária X_1, X_2, \dots, X_n tal que M_n possua distribuição do tipo II (Fréchet). Rearranjando as observações em ordem crescente $X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_m \geq X_{m-1} \geq \dots \geq X_1$, dois estimadores para o parâmetro ξ com base nas maiores estatísticas de ordem X_i são introduzidos a seguir.

Estimador de Pickands

O estimador é dito ser fracamente consistente. A sua consistência forte e normalidade assintótica são obtidas quando o valor de ordem máxima m cresce rapidamente em relação ao tamanho da amostra n . O estimador de Pickand é um estimador geral e fornece estimativas em detrimento de todas as três leis de limite e é dado por

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \hat{\xi}_P = \frac{\log \left(\frac{X_m - X_{2m}}{X_{2m} - X_{4m}} \right)}{\log 2} \quad (2.18)$$

em que m é o ponto de corte para os valores excedentes.

Estimador de Hill

O estimador de Hill foi proposto por Hill (1975) e provado ser um estimador consistente de ξ com $(\hat{\xi}_H - \xi)m^{\frac{1}{2}}$ assintoticamente Normal, com média zero e variância ξ^2 . O índice de Hill é mais eficiente que o estimador de máxima verossimilhança por possuir variância menor e melhor que o estimador de Pickands com base na consistência e é definido como

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \hat{\xi}_H = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\log X_{n-j+1} - \log X_{n-m}). \quad (2.19)$$

em que n é o tamanho da amostra e m é o ponto de corte para os valores excedentes.

A estimativa do índice caudal, em ambos os estimadores, depende da escolha do ponto de corte m . Embora os estimadores demandem que m tenda ao infinito, a uma taxa menor que o tamanho da amostra n , existem poucas instruções de como escolher m de forma otimizada. Danielson & de Vries (1997a) e Bensalah (2000) denotam que a escolha do limiar (m) está sujeita a um *trade-off* entre variância e viés do estimador.

Esse problema seria mais grave em pequenas amostras. Se m for escolhido de forma conservadora, com algumas observações a partir da cauda, a estimativa do parâmetro da cauda será sensível a *outliers* na distribuição e terá maior variância. Por outro lado, muitas observações localizadas além da cauda e poucas na parte

central da distribuição pode resultar em um índice mais estável, porém com maior viés.

Há uma gama de propostas para lidar com a questão do *trade-off*. Embrechts et al. (1997) propõem o uso do gráfico de Hill. Nessa metodologia α é estimado para diferentes valores de m , e então, o valor otimizado de m é escolhido da região em que a estimativa do parâmetro da cauda é estável. Mesmo se essa região existir, selecionar o valor de m específico, pode não ser tão preciso.

2.5 Modelagem dos Dados

Seja $X_{k,t}$ o valor do k -ésimo preço de oferta registrado no dia t , em que $k = 1, \dots, Q_t$, e $t = 1, 2, \dots, n$. Aqui, Q_t representa a quantidade de registros no dia t , e n denota o tamanho da série diária. Para cada dia t , a série diária $\{X_{1,t}, \dots, X_{Q_t,t}\}$ representa uma trajetória *intraday*.

Define-se a variação diária dos preços como

$$v_t = \frac{1}{Q_t} \sum_{k=1}^{Q_t} (X_{k,t} - \bar{X}_t)^2, \quad (2.20)$$

em que $\bar{X}_t = \frac{1}{Q_t} \sum_{k=1}^{Q_t} X_{k,t}$. A Figura 2.4 mostra a evolução temporal da série diária v_t .

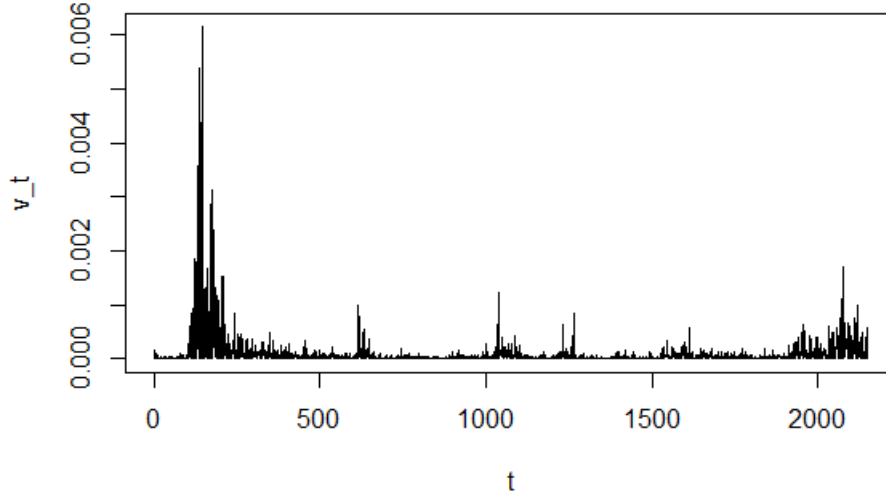


Figura 2.4: Evolução da série *intraday* da variabilidade diária dos preços.

Para ilustrar a aplicação da Teoria do Valor Extremo, considera-se o logarítmo do retorno da variabilidade diária dos preços. Seja S_t o preço de um ativo (carteira) no tempo t . Então o logarítmo do retorno é dado por

$$R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \log S_t - \log S_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, k, \quad (2.21)$$

assim $R_t(k) = R_t + R_{t-1} + \dots + R_{t-k+1}$, cuja evolução temporal e função de autocorrelação está ilustrada na Figura 2.5.

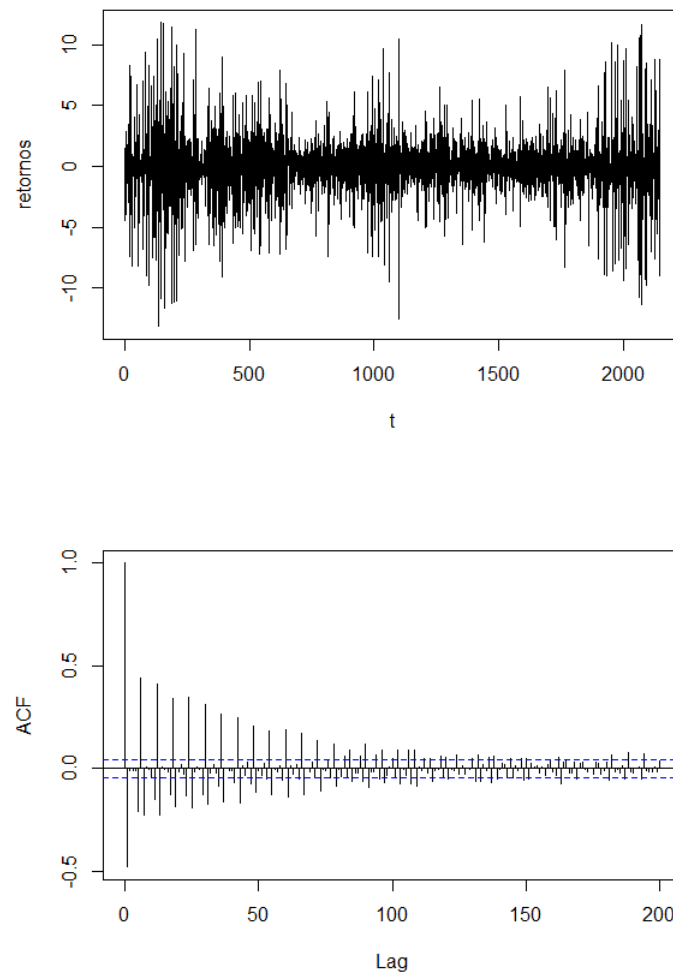


Figura 2.5: Pannel superior: Evolução da série logarítmica dos retornos da variabilidade diária dos preços. Pannel inferior: Função de autocorrelação amostral.

Capítulo 3

Aplicação

Neste capítulo será mostrada uma aplicação da Teoria do Valor Extremo com base em uma série logarítmica dos retornos da variabilidade diária das taxas de câmbio do dólar norte-americano frente ao real.

Primeiramente, será feita uma descrição dos dados e, em seguida, esboçam-se alguns testes de estacionariedade e independência para definir os modelos mais adequados para os dados. Com isso, faz-se o ajuste da distribuição que mais se adequar aos dados para realizar as estimativas dos parâmetros e apresentar as análises dos diagnósticos.

3.1 Descrição da Série Temporal

Os dados foram cordialmente cedidos pela *Tick Data* (www.tickdata.com). Eles constituem a série temporal *intra day* (de alta frequência) das taxas de câmbio do dólar norte-americano. O *FOREX* (*Foreign Exchange*) é considerado o maior mercado mundial em termos de movimentação diária de dinheiro. Ele é

operado continuamente, 24 horas por dia, entre 14h00 de domingo e 18h00 de sexta (horários de Brasília). Por consequência, permite-se maior volume e tempo para a realização das transações.

No *FOREX*, a operação é feita em pares, envolvendo simultaneamente a compra de uma moeda e a venda de outra, como exemplo, R\$ e US\$. Nesse mercado, o que se negocia não é o papel monetário, mas sim a relação de troca entre as moedas. Assim, ao se fazer uma operação nesse mercado, não se negocia determinada divisa, e sim sua taxa de câmbio em relação a outra.

A Tabela 3.1 mostra um trecho da série temporal e também ilustrada na Figura 3.1. Esta série *intraday* é composta de 1.745.081 observações, de 05/06/2008 a 16/06/2015.

Tabela 3.1: Trecho da série *intraday* R\$/US\$.

Data	Horário	Preço de Compra
05/06/2008	16:00:37.994	1.6605
05/06/2008	16:06:13.102	1.6605
05/06/2008	16:07:38.180	1.6605
⋮	⋮	⋮
16/06/2015	17:53:00.099	3.1073
16/06/2015	17:54:00.123	3.1073
16/06/2015	17:56:00.109	3.1073

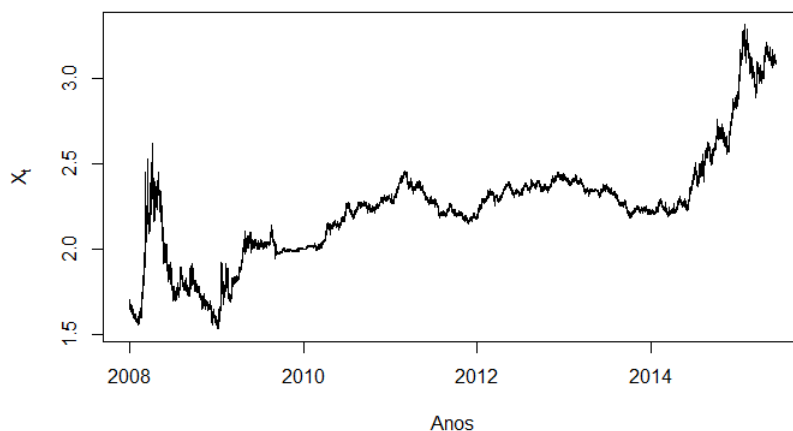


Figura 3.1: Evolução da série *intraday* da taxa diário de câmbio.

3.2 Testes de Estacionariedade e Independência

Neste trabalho, será analisado o caso de perdas extremas de valor do retorno da variabilidade diária dos preços. A série representa a taxa de câmbio do dólar norte-americano frente ao real com 2148 observações.

Para iniciar a modelagem dos dados é fundamental que a série seja estacionária, portanto, para verificar a estacionariedade da série temporal foi realizado o teste de Dickley-Fuller Aumentado (ADF), em que se testa a hipótese nula de que existe a presença de raiz unitária na série. Outro ponto a se observar é a análise de independência dos dados. Desta maneira, aplicou-se o teste de Ljung-Box, cujo teste apresenta melhores resultados que o teste de Box-Pierce, para testar a hipótese nula dos resíduos serem i.i.d..

Pelos resultados apresentados na Tabela 3.2, nota-se que a série apresentada é estacionária, de acordo com o teste ADF e pelo painel inferior da Figura 2.5,

Tabela 3.2: Resultados testes ADF e Ljung-Box.

Teste ADF	p -valor	Ljung-Box	p -valor
-21.673	<0.0001	497.05	<2.2e-16

denotado pela função de autocorrelação da série, mostra que há uma dependência serial nos dados, com autocorrelação negativa para o primeiro *lag*, porém não significativo.

Outro ponto é a observância de que a série dos retornos apresenta *clusters* de volatilidade como mostrado no painel superior da Figura 2.5. Este comportamento é esperado em virtude dos fatos estilizados em finanças. Para se prosseguir com a análise dos dados é importante realizar um processo de *declustering*, para que os dados passem a ser homocedásticos.

3.3 Modelagem dos Log-Retornos

Nessa seção será realizado o ajuste da distribuição dos retornos antes e após o processo de *desclustering*. Após este ajuste ter-se-á uma indicação de qual deve ser o domínio de atração maximal dos log-retornos da taxa de câmbio.

Preliminarmente, para se ter uma ideia da possível distribuição de probabilidade plota-se o histograma dos log-retornos. E pode-se comparar a distribuição gaussiana com o estimador de densidade *kernel*. Na Figura 3.2 tem-se a ilustração do histograma, a densidade da distribuição, através do *kernel*, e a distribuição normal a título de comparação.

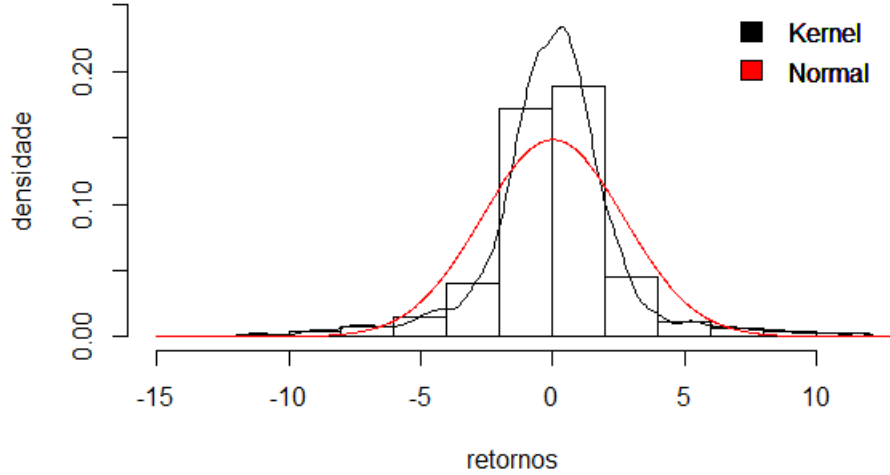


Figura 3.2: Histograma dos log-retornos, estimação *kernel* e distribuição Normal.

Pela Figura 3.2, verifica-se que a distribuição normal não se ajusta de forma satisfatória a distribuição dos retornos, uma das razões para isso, é a forma mais afunilada e concentrada da distribuição. Diz-se que a função de probabilidade é leptocúrtica (curtose = 4.17), ao passo que a distribuição normal é mesocúrtica. Esse comportamento da distribuição mostra a evidência de caudas pesadas diferenciando ainda mais da distribuição normal.

Estes resultados podem ser devido a uma amostra não i.i.d. os dados apresentam características heterocedásticas. Na tentativa de transformar a serie i.i.d., realiza-se o *declustering* a partir do ajuste de um modelo $AR(1) - GARCH(1, 1)$ dos dados, que tem a seguinte estrutura,

$$R_t = \mu + \phi R_{t-1} + \epsilon_t, \quad (3.1)$$

com $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ e $\epsilon = r_t - \hat{\mu}_t$ em que σ_t e ϵ_t são o desvio padrão condicional e resíduo, respectivamente. Os resíduos padrão da série z_t , gerados pelo modelo, são calculados por,

$$(z_{t-n+1}, \dots, z_t) = \left(\frac{r_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right),$$

e com a correta especificação, o modelo deverá ser i.i.d.. O modelo $GARCH(1, 1)$ foi estimado a partir da máxima quase-verossimilhança, isto é, considerando que os dados possuem segundo momento finito, atribui-se uma distribuição gaussiana, visto que é a de máxima entropia para este caso.

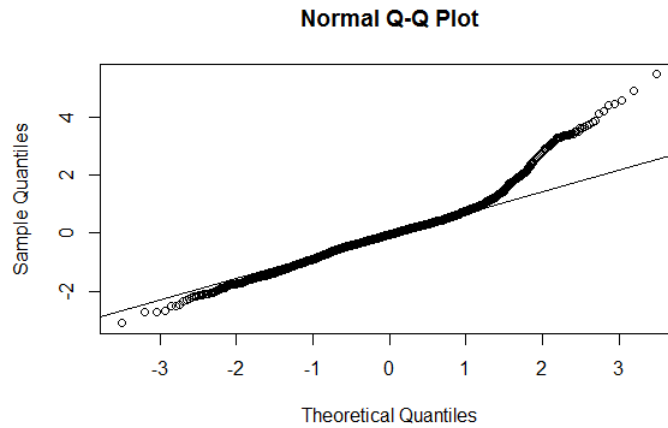


Figura 3.3: *QQ-plot* dos resíduos.

A independência é constatada pelo teste de Ljung-Box com p -valor $3.144e - 10$. Como pode ser visto na Figura 3.3, os resíduos, ainda assim, não apontam para uma distribuição normal. Mesmo sendo padronizados eles ainda possuem caudas pesadas. Dessa forma, seguem os ajustes de algumas distribuições para os resíduos que possuem caudas pesadas e também para a distribuição normal.

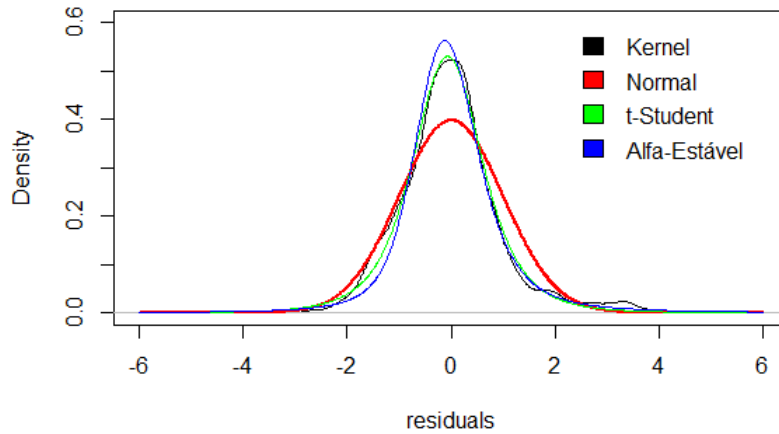


Figura 3.4: Ajuste dos resíduos do modelo $AR(1) - GARCH(1, 1)$.

A distribuição α -estável e a t -Student praticamente coincidem, visto que ambas possuem caudas pesadas. Os resultados das estimativas são apresentados na Tabela 3.3 e todos os parâmetros foram estatisticamente significativos.

Tabela 3.3: Resultado da Estimação dos Parâmetros.

Distribuição	Locação	Escala	Forma	Assimetria
Normal	0	1	-	-
t-Student	-0.070	0.702	3.590 (g.l.)	-
Alfa-Estável	-0.096	0.511	1.439	0.266

Os resultados apontam para uma distribuição de cauda pesada, o que nos leva a sugerir que o domínio de atração maximal é de uma distribuição Frechet. Para investigar isto, a partir da TVE, procede-se a análise através de blocos máximos. Dessa maneira, os dados dos retornos são divididos em blocos de tamanho l montados sequencialmente. A partir desses blocos são calculados os valores máximos de cada um. Com blocos de tamanho $l = 3$ tem-se os seguintes resultados.

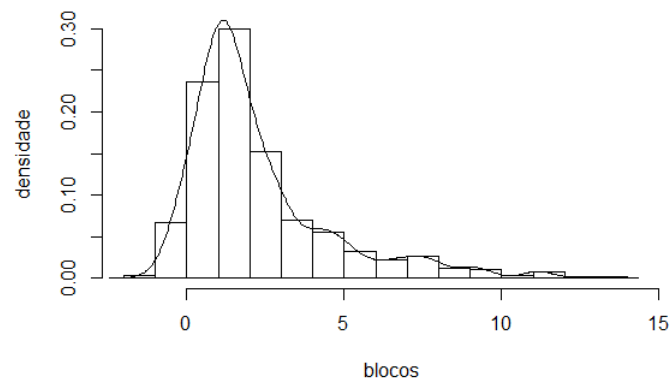


Figura 3.5: Histograma dos blocos máximos.

Para se ter uma estimativa do domínio de atração, foi ajustada uma GEV a partir dos blocos. O parâmetro ξ é chamado de índice caudal e mede a forma de decaimento da cauda. Caso o parâmetro de índice caudal seja $\xi > 0$, então tem-se o caso de uma Fréchet.

Tabela 3.4: Estimação dos Parâmetros da GEV.

Parâmetro	ξ	μ	σ
Blocos Máximo	0.228	1.233	1.189

Os parâmetros da GEV foram estimados via máxima verossimilhança. Pela Figura 3.5 e pelo resultado da Tabela 3.4 tem-se que o domínio de atração é de fato uma Fréchet.

Com o ajuste de uma Gumbel, via máxima verossimilhança, pode-se observar que não se adequa muito bem, visto que seu índice caudal seria de $\xi = 0$.

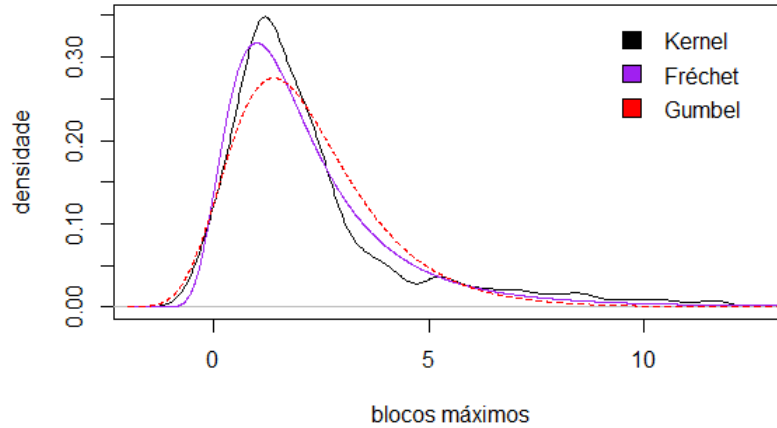


Figura 3.6: Ajuste da distribuição GEV.

O principal objetivo do *Peak Over Threshold* (POT) é solucionar o problema da estimação da cauda, Belitsky & Moreira (2007). Diferente do método de Gumbel, em que se selecionam os valores máximos dos blocos da amostra, o método POT consiste em determinar um limiar ótimo (*threshold limit*), o qual, acima desse, todos os valores serão tratados como valores extremos, ou seja, tem-se a certeza de sempre estar se tratando de eventos raros, o que não acontece quando separados por blocos.

Essa metodologia é aplicada quando o tempo médio de retorno ao excedente se torna uma variável importante na análise, isto é, deseja-se saber o tempo médio necessário para que a série ultrapasse o limiar estabelecido, e, para isso, a distribuição Pareto Generalizada é utilizada. Nesse caso, conforme mostra a Figura 3.7, o limiar escolhido é 1.924 e acima dessa linha tracejada encontram-se 108 pontos.

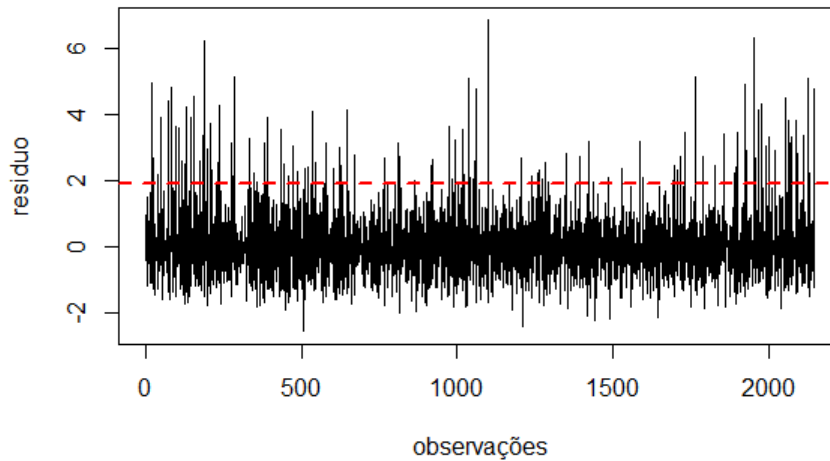


Figura 3.7: Série do log-retorno com limiar tracejado.

Foram estimados os parâmetros da distribuição Pareto Generalizada através da função *gpdFit* do pacote *evir* do *software* R através do estimador de máxima verossimilhança (ML) e na Tabela 3.5 é apresentado o resultado das estimações para os parâmetros.

Tabela 3.5: Estimação dos Parâmetros da GPD.

Estimação	ξ	σ
ML	-0.194	1.462

A Figura 3.8 apresenta os gráficos de diagnósticos para o ajuste da GPD pelo método da máxima verossimilhança e para os dados dos log-retornos da variabilidade diária dos preços, e nota-se que o ajuste foi bastante satisfatório para o estimador utilizado.

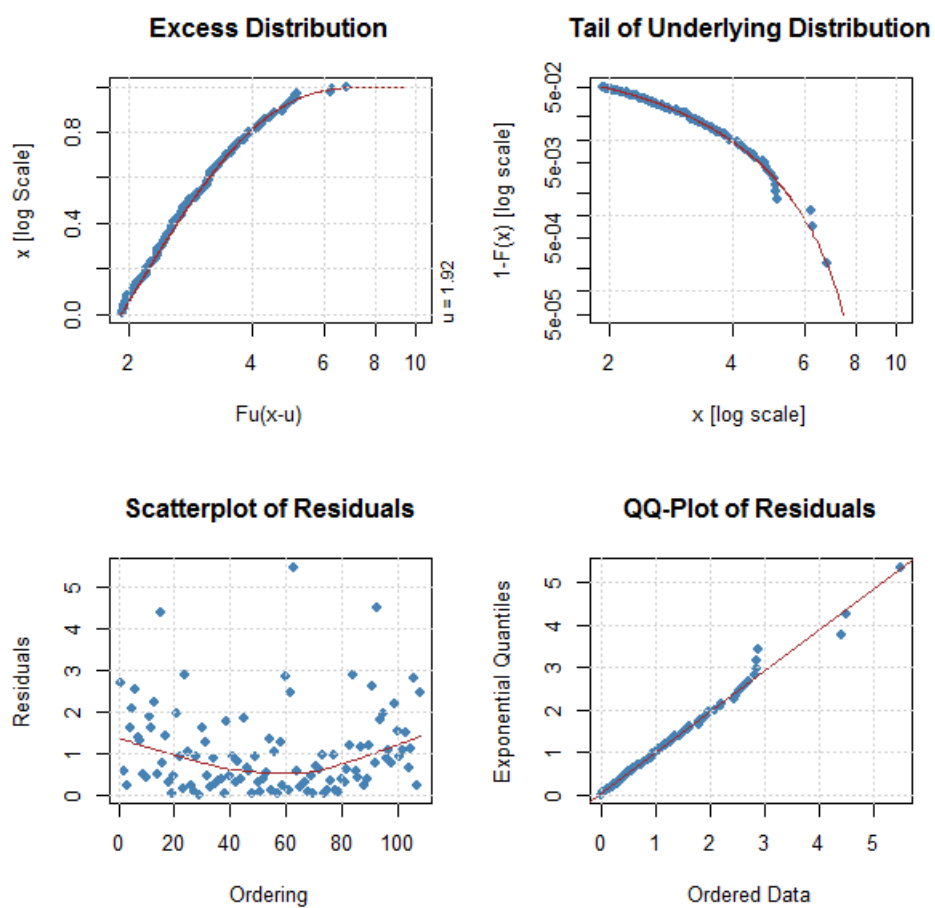


Figura 3.8: Gráficos de diagnóstico.

Capítulo 4

Conclusões

O trabalho aplicou a Teoria do Valor Extremo (TVE) para modelar a distribuição maximal na série logarítmica do retorno da variabilidade diária das taxas de câmbio da moeda norte-americana (dólar, US\$) frente ao real. Apresenta-se primeiramente uma análise exploratória dos dados, estacionariedade e independência, e em seguida a realização de *declustering* para que os dados passem a ser homocedásticos. Enfim, os dados foram ajustados para o modelo $AR(1) - GARCH(1, 1)$.

A modelagem foi feita após a comparação da distribuição *kernel* com a distribuição normal que evidenciou o comportamento de caudas pesadas da distribuição. Dessa forma, foram ajustados algumas distribuições para os resíduos do ajuste do modelo com resultados pertinentes para distribuições como, por exemplo, α -estável. Os resultados das estimativas sugeriram que o domínio de atração maximal é de uma distribuição Frèchet.

Com isso, ajusta-se um GEV a partir dos blocos em que foram estimados os parâmetros por máxima verossimilhança, que denotaram o ajuste pela distribui-

ção Fréchet em comparação com a distribuição Gumbel, que não se ajustou bem aos dados.

Por fim, utilizou-se a metodologia POT, em que, dado um determinado limiar, todos os pontos excedentes são tratados como eventos raros, portanto, foram estimados os parâmetros da distribuição Pareto Generalizada (GPD) e feito análises através de gráficos de diagnósticos em que o ajuste foi considerado bastante satisfatório.

No geral, a utilização da Teoria do Valor Extremo (TVE) é bastante enriquecedora na análise de perdas de extremas em uma carteira de investimento. O assunto ajuda a investigar valores extremos, pontos de limiar e dessa forma, utilizar modelagens estatísticas de maneira mais concisa e coerente com a realidade dos dados. Por isso, vários autores sugerem a utilização dessa metodologia, acompanhada ou não de outros métodos, para inferir sobre perdas e eventos de quebras no mercado acionário entre diversos outros fatores de risco existentes mundialmente.

Os resultados da aplicação da TVE na série de câmbio demonstraram o poder da metodologia em contornar problemas que métodos clássicos não conseguem lidar (modelagem das caudas), e através de dois métodos, bloco máximo e POT, ilustra-se nos gráficos o comportamento da cauda dessa distribuição (pesada). Isso mostra a concordância com trabalhos anteriores corroborando para o ajuste dos dados de forma mais fidedigna a realidade.

Conclui-se que a utilização dessa abordagem, não somente auxiliou na modelagem dos dados, bem como denotou vários aspectos intrínsecos de séries financeiras que acabam sendo defadas por outras metodologias básicas.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Belitsky e F.M. Moreira. **Emprego do Método "Peaks Over Threshold" na Estimação de Risco**. Third Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance, São Paulo, p. 116, 2007.
- [2] Y. Bensalah. **Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: A Review**. Bank of Canada Working Paper, No. 20, (<http://www.bankofcanada.ca/en/res/wp00-20.htm>), 2000.
- [3] J. Bierlant e J.L. Teugels. **Limit Distributions for Compounded Sums of Extreme Order Statistics**. Journal of Applied Probability, Vol. 29, No. 3, p. 557-574, 1992.
- [4] J. Bierlant e J.L. Teugels. **Modeling Large Claims in Non-Life Insurance**. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 11, p. 17-29, 1992.
- [5] J. Danielsson e C.G. de Vries. **Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation**. Mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam, 1997a.
- [6] P. Embrechts e C. Klüppelberg. **Some Aspects of Insurance Mathematics**. Journal of Applied Probability, 1993.

- [7] P. Embrechts, C. Klüppelberg e T. Mikosch. **Modelling Extremal Events for Insurance and Finance**. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [8] P. Embrechts, C. Klüppelberg e T. Mikosch. **Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Applications of Mathematics**. Springer, Ed. 2^o, 1999.
- [9] E.F. Fama **Foundation of Finance**. Basic Books, New York, 1976.
- [10] R. Fisher e L.H.C. Tippett. **Limiting Forms of the Frequency Distribution of Largest or Smallest Member of a Sample**. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 24, p. 180–190, 1928.
- [11] M. Gilli e E. Këllezi. **An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk**. Computational Economics, Vol. 27, p. 1–23, 2006.
- [12] B.M. Hill. **A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution**. Annals of Statistics, Vol. 3, p. 1163–1174, 1975.
- [13] J.R.M. Hosking e J.R. Wallis. **Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution**. Technometrics, Vol. 29, p. 339–349, 1987.
- [14] D.W. Jansen e C.G. de Vries. **On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective**. The Review of Economics and Statistics, Vol. 73, p. 18–24, 1991.
- [15] A.F. Jenkinson. *The Frequency Distribution of the Annual Maximum (Mi-*

- nimum) Values of Meteorological Events*. Quarterly Journal of the Royal, Meteorological Society, Vol. 81, p. 158–172, 1955.
- [16] E. Jondeau, S-H. Poon e M. Rockinger. **Financial modeling under Non-Gaussian Distributions**. Springer Science & Business Media, 2000.
- [17] E. Jondeau, S-H. Poon e M. Rockinger. **Financial Modeling under Non-Gaussian Distributions**. Springer Verlag, New York, 2007.
- [18] F.M. Longin. *From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach*. Journal of Banking & Finance 24, 1097-1130, 2000.
- [19] B. Mandelbrot. **Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets, and Martingale Models**. Journal of Business, Vol. 39, p. 242-255, 1966.
- [20] V. Marimoutou, B. Raggard e A. Trabelsi. **Extreme Value Theory and Value at Risk : Application to Oil Market**. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00410746>, 2006.
- [21] C. Marinelli, S. d’Addona e S. Rachev. **A Comparison of Some Univariate Models for Value-at-Risk and Expected Shortfall**. <http://ssrn.com/abstract=958609>, 2006.
- [22] P. Prescott e A.T. Walden. **Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of Generalized Extreme Value Distribution**. Biometrika, Vol. 67, p. 723-724, 1980.
- [23] S.T. Rachev e S. Mitnik. **Stable Paretian Models in Finance**. Wiley, New York, 2000.

- [24] R.D. Reiss e M. Thomas. **Statistical Analysis of Extreme Values**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [25] R.D. Reiss e M. Thomas. **Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [26] R. von Mises. **La Distribution de la Plus Grande de n Valeurs**. In Selected Papers, American Mathematical Society, Providence, RI, Vol. 2, p. 271–294, 1954.